

## THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CHO BÀN MÁY ĐỘNG

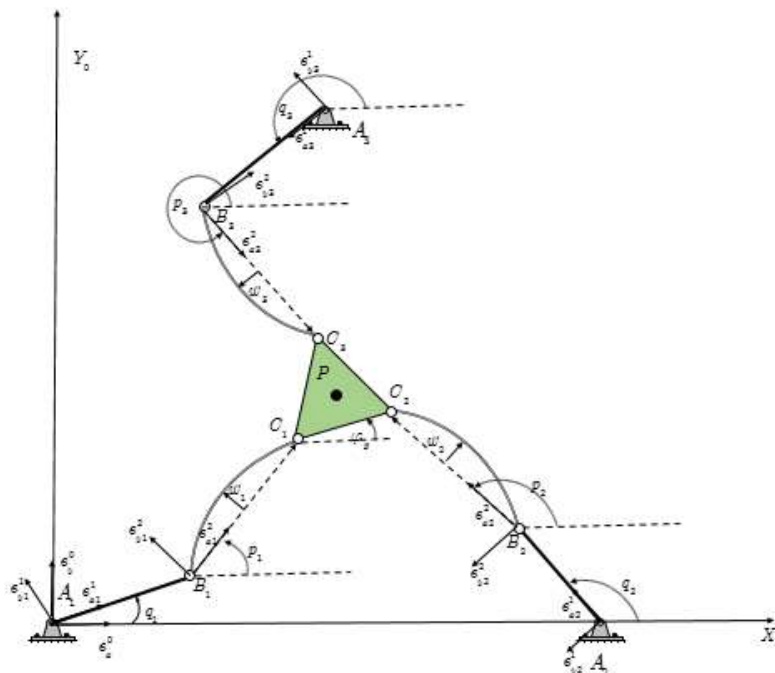
**Mở đầu :** Robot song song là robot có cấu trúc vòng kín trong đó các khâu được nối với nhau bằng các khớp động. Trong robot song song, khâu thao tác được nối với giá cố định bởi một số mạch động học, tức là nối song song với nhau và cũng hoạt động song song với nhau.

Robot song song có nhiều ưu điểm như khả năng chịu tải trọng lớn, độ cứng vững cao do kết cấu hình học của chúng, có thể thực hiện các thao tác phức tạp và hoạt động với độ chính xác cao. Vì những ưu điểm đó, robot song song được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của công nghiệp đặc biệt là trong lĩnh vực cơ khí - tự động hóa.

Robot song song điển hình gồm có bàn máy động được nối với giá cố định, dẫn động theo nhiều nhánh song song hay còn gọi là các chân. Thường robot song song có số chân bằng số bậc tự do, được điều khiển bởi nguồn phát động đặt trên giá cố định hoặc ngay trên chân. Nguồn phát động sẽ truyền chuyển động cho chân chủ động bằng momen hoặc lực. Vì vậy để có thể điều khiển được hoạt động của bàn máy động ta cần phải thiết lập được mô hình chính xác nhất cho bàn máy động, mà ở đó yếu tố đàn hồi là không thể bỏ qua trong một số khâu của bàn máy.

### 1. Mô hình hóa

Xét một bàn máy động chuyển động trong mặt phẳng ngang như hình 1. Các thanh được mô hình hóa bởi các dầm sử dụng lý thuyết dầm Euler – Bernoulli.



Hình 1. Bàn máy động phẳng

Chọn  $Ox_0y_0$  làm hệ cố định,  $q_i$  là góc hợp bởi thanh  $A_iB_i$  với trục  $Ox_0$ ,  $p_i$  là góc hợp bởi thanh  $B_iC_i$  với trục  $Ox_0$ , các hệ trục  $O_ix_i^1y_i^1$  là các hệ quy chiếu động gắn với các thanh  $A_iB_i$ , các hệ trục  $O_ix_i^2y_i^2$  là các hệ quy chiếu động gắn với các thanh  $B_iC_i$ . Vị trí của bàn máy được xác định trong hệ quy chiếu cố định bởi các tọa độ suy rộng:

$$\eta_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Công thức chuyển tọa độ giữa các hệ quy chiếu là:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^1 \\ \vec{e}_{yi}^1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^1 \\ \vec{e}_{yi}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_i & \sin q_i \\ -\sin q_i & \cos q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p_i & -\sin p_i \\ \sin p_i & \cos p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^2 \\ \vec{e}_{yi}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^2 \\ \vec{e}_{yi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p_i & \sin p_i \\ -\sin p_i & \cos p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2. Phương trình chuyển động

### 2.1 Động năng

Động năng của hệ :

$$T = T_b + \sum_{i=1}^3 (T_{A_iB_i} + T_{B_iC_i}) \quad (6)$$

Trong đó động năng của bàn máy:

$$T_b = \frac{1}{2} m_P v_P^2 + \frac{1}{2} I_P \dot{\varphi}^2 \quad (7)$$

Động năng của các khâu rắn:

$$T_{A_iB_i} = \frac{1}{2} I_{1i} \dot{q}_i^2 \text{ với } i=1,2,3 \quad (8)$$

Động năng của các khâu đàn hồi:

$$T_{B_i C_i} = \frac{1}{2} \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} v_{N_i}^2 dx_i \text{ với } i=1,2,3 \quad (9)$$

Véc tơ định vị của điểm  $N_i$  trên thanh  $B_i C_i$  là:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{N_i} &= \overrightarrow{A_i B_i} + \overrightarrow{B_i N_i^*} + \overrightarrow{N_i^* N_i} \\ \vec{r}_{N_i} &= a_i \vec{e}_{xi}^1 + x_i \vec{e}_{xi}^2 + w_i \vec{e}_{yi}^2 \\ \vec{r}_{N_i} &= a_i \cos q_i \vec{e}_x^0 + a_i \sin q_i \vec{e}_y^0 + x_i \cos p_i \vec{e}_x^0 + x_i \sin p_i \vec{e}_y^0 + w_i \cos p_i \vec{e}_y^0 - w_i \sin p_i \vec{e}_x^0 \\ \vec{r}_{N_i} &= (a_i \cos q_i + x_i \cos p_i - w_i \sin p_i) \vec{e}_x^0 + (a_i \sin q_i + x_i \sin p_i + w_i \cos p_i) \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (10)$$

Vậy

$$\begin{bmatrix} x_{N_i} \\ y_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos q_i + x_i \cos p_i - w_i \sin p_i \\ a_i \sin q_i + x_i \sin p_i + w_i \cos p_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

Đạo hàm lên ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{N_i} \\ \dot{y}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_i \dot{q}_i \sin q_i - \dot{p}_i x_i \sin p_i - w_i \dot{p}_i \cos p_i - \dot{w}_i \sin p_i \\ a_i \dot{q}_i \cos q_i + \dot{p}_i x_i \cos p_i - w_i \dot{p}_i \sin p_i + \dot{w}_i \cos p_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

Vận tốc của điểm  $N_i$  là:

$$\begin{aligned} v_{N_i}^2 &= (\dot{x}_{N_i})^2 + (\dot{y}_{N_i})^2 = (-a_i \dot{q}_i \sin q_i - \dot{p}_i x_i \sin p_i - w_i \dot{p}_i \cos p_i - \dot{w}_i \sin p_i)^2 + \\ &+ (a_i \dot{q}_i \cos q_i + \dot{p}_i x_i \cos p_i - w_i \dot{p}_i \sin p_i + \dot{w}_i \cos p_i)^2 \\ v_{N_i}^2 &= a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i^2 \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \\ &+ 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) \end{aligned} \quad (13)$$

Vậy động năng của các khâu đàn hồi:

$$T_{B_i C_i} = \frac{1}{2} \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} \left( a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i^2 \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \right. \\ \left. + 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) \right) dx_i \quad (14)$$

Động năng của hệ:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\varphi}^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} I_i \dot{q}_i^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} \left( a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \right. \\
& \left. + 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) \right) dx_i
\end{aligned}
\tag{15}$$

## 2.2 Thế năng

Thế năng đàn hồi của hệ được cho dưới dạng

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} E_{i2} I_{i2} \int_0^{b_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \tag{16}$$

## 2.3 Phương trình liên kết

$$f_1 = a_1 \cos(q_1) + b_1 \cos(p_1) - w_{B1} \sin(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - x_p \tag{17}$$

$$f_2 = a_1 \sin(q_1) + b_1 \sin(p_1) - w_{B1} \cos(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - y_p \tag{18}$$

$$f_3 = l_0 + a_2 \cos(q_2) + b_2 \cos(p_2) - w_{B2} \sin(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - x_p \tag{19}$$

$$f_4 = a_2 \sin(q_2) + b_2 \sin(p_2) - w_{B2} \cos(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - y_p \tag{20}$$

$$f_5 = \frac{l_0}{2} + a_3 \cos(q_3) + b_3 \cos(p_3) - w_{B3} \sin(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p) - x_p \tag{21}$$

$$f_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0 + a_3 \sin(q_3) + b_3 \sin(p_3) - w_{B3} \cos(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p) - y_p \tag{22}$$

## 2.4 Rời rạc hóa phần tử đàn hồi

Giả thiết biến dạng là nhỏ, Sử dụng phương pháp khai triển theo các dạng riêng Ritz – Galerkin, dao động uốn có dạng:

$$w_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^{N_i} X_{ki}(x_i) . h_{ki}(t) \quad i=1,2,3 \tag{23}$$

Trong đó  $X_k$  là các hàm thỏa mãn điều kiện biên của dầm 2 đầu bản lề:

$$X_{ki} = \sin\left(\frac{k\pi}{l_i} x_i\right) \quad i=1,2,3 \quad (24)$$

Như vậy chuyển động thực của khâu nối đàn hồi  $B_i C_i$  bao gồm chuyển động lớn của tọa độ góc khâu và chuyển động bé của các biến dạng đàn hồi. Trong trường hợp sử dụng một dạng riêng đầu tiên cho các thanh đàn hồi :  $N_i = I$  với  $i=1,2,3$  động năng và thế năng của hệ trở thành:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4} b_1 \mu_{12} h_1^2 \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_1 \mu_{12} \dot{q}_1^2 a_1^2 + \frac{1}{6} b_2^3 \mu_{22} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{4} b_2 \mu_{22} \dot{h}_2^2 + \frac{b_2^2 \mu_{22} \dot{p}_2 \dot{h}_2}{\pi} + \frac{1}{2} b_2 \mu_{22} \dot{q}_2^2 a_2^2 \\ & + \frac{1}{4} b_2 \mu_{22} \dot{p}_2^2 h_2^2 + \frac{1}{2} \dot{p}_1 \dot{q}_1 a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - \frac{2}{\pi} h_1 \dot{p}_1 \dot{q}_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + \frac{1}{6} b_1^3 \mu_{12} \dot{p}_1^2 \\ & + \frac{1}{4} b_1 \mu_{12} \dot{h}_1^2 + \frac{b_1^2 \mu_{12} \dot{h}_1 \dot{p}_1}{\pi} + \frac{1}{2} I_b \dot{\varphi}_p^2 + \frac{1}{2} I_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{21} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{31} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_{12} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \dot{p}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} I_{32} \dot{p}_3^2 + \frac{1}{2} M_b \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} M_b \dot{y}_p^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \dot{p}_2 a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) \\ & - \frac{2}{\pi} \dot{q}_2 \dot{p}_2 h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + \frac{1}{6} b_3^3 \mu_{32} \dot{p}_3^2 + \frac{b_3^2 \mu_{32} \dot{p}_3 \dot{h}_3}{\pi} + \frac{1}{4} b_3 \mu_{32} \dot{h}_3^2 \\ & + \frac{1}{2} b_3 \mu_{32} \dot{q}_3^2 a_3^2 + \frac{1}{4} b_3 \mu_{32} \dot{p}_3^2 h_3^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_3 \dot{p}_3 a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - \frac{2}{\pi} \dot{q}_3 \dot{p}_3 h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) \\ & \frac{2}{\pi} \dot{h}_1 \dot{q}_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) + \frac{2}{\pi} \dot{q}_2 \dot{h}_2 \cos(p_2 - q_2) a_2 b_2 \mu_{22} + \frac{2}{\pi} \dot{q}_3 \dot{h}_3 \cos(p_3 - q_3) a_3 b_3 \mu_{32} \end{aligned} \quad (25)$$

$$U = \frac{E_1 I_{12} \pi^4 h_1^2}{4b_1^3} + \frac{E_2 I_{22} \pi^4 h_2^2}{4b_2^3} + \frac{E_3 I_{32} \pi^4 h_3^2}{4b_3^3} \quad (26)$$

Phương trình liên kết lúc này có dạng:

$$f_1 = a_1 \cos(q_1) + b_1 \cos(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (27)$$

$$f_2 = a_1 \sin(q_1) + b_1 \sin(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (28)$$

$$f_3 = l_0 + a_2 \cos(q_2) + b_2 \cos(p_2) - w_{B2} \sin(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (29)$$

$$f_4 = a_2 \sin(q_2) + b_2 \sin(p_2) - w_{B2} \cos(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (30)$$

$$f_5 = \frac{l_0}{2} + a_3 \cos(q_3) + b_3 \cos(p_3) - w_{B3} \sin(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p) - x_p \quad (31)$$

$$f_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0 + a_3 \sin(q_3) + b_3 \sin(p_3) - w_{B3} \cos(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p) - y_p \quad (32)$$

## 2.5 Phương trình chuyển động

Tọa độ suy rộng của hệ:

$$\eta = \left[ h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad x_p \quad y_p \quad \varphi_p \right]^T \quad (33)$$

Phương trình Lagrange dạng nhân tử viết cho hệ holoônôm

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_j} - \left( \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j} \right) + Q_j \quad j=1,2,\dots,12 \quad (34)$$

Tính các đạo hàm và thay vào ta được phương trình vi phân chuyển động của hệ:

Phương trình với các tọa độ đàn hồi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b_1 \mu_{12} \ddot{h}_1 + \frac{2 \cos(p_1 - q_1) a_1 b_1 \mu_{12}}{\pi} \ddot{q}_1 + \frac{b_1^2 \mu_{12}}{\pi} \ddot{p}_1 \\ & + \frac{-h_1 \pi \dot{p}_1^2 b_1^4 \mu_{12} + 4 \dot{q}_1^2 a_1 b_1^4 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + E_1 I_{12} \pi^5 h_1}{2 \pi b_1^3} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b_2 \mu_{22} \ddot{h}_2 + \frac{2 \cos(p_2 - q_2) a_2 b_2 \mu_{22}}{\pi} \ddot{q}_2 + \frac{b_2^2 \mu_{22}}{\pi} \ddot{p}_2 \\ & + \frac{-h_2 \pi \dot{p}_2^2 b_2^4 \mu_{22} + 4 \dot{q}_2^2 a_2 b_2^4 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + E_2 I_{22} \pi^5 h_2}{2 \pi b_2^3} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b_3 \mu_{32} \ddot{h}_3 + \frac{2 \cos(p_3 - q_3) a_3 b_3 \mu_{32}}{\pi} \ddot{q}_3 + \frac{b_3^2 \mu_{32}}{\pi} \ddot{p}_3 \\ & + \frac{-h_3 \pi \dot{p}_3^2 b_3^4 \mu_{32} + 4 \dot{q}_3^2 a_3 b_3^4 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) + E_3 I_{32} \pi^5 h_3}{2 \pi b_3^3} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Phương trình đối với các tọa độ khớp khâu rắn:

$$\begin{aligned}
& \frac{2a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1)}{\pi} \ddot{h}_1 + \frac{(\pi a_1^2 b_1 \mu_{12} + I_{11} \pi)}{\pi} \ddot{q}_1 \\
& + \frac{(\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - 4h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1))}{2\pi} \ddot{p}_1 \\
& + \frac{-\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) - 4h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1)}{2\pi} \dot{p}_1^2 \\
& + \frac{-8h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1)}{2\pi} \dot{p}_1 - \lambda_1 a_1 \sin(q_1) + \lambda_2 a_1 \cos(q_1) = \tau_1
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2)}{\pi} \ddot{h}_2 + \frac{(\pi a_2^2 b_2 \mu_{22} + I_{21} \pi)}{\pi} \ddot{q}_2 \\
& + \frac{(\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) - 4h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2))}{2\pi} \ddot{p}_2 \\
& + \frac{-\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) - 4h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2)}{2\pi} \dot{p}_2^2 \\
& + \frac{-8h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2)}{2\pi} \dot{p}_2 - \lambda_3 a_2 \sin(q_2) + \lambda_4 a_2 \cos(q_2) = \tau_2
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3)}{\pi} \ddot{h}_3 + \frac{(\pi a_3^2 b_3 \mu_{32} + I_{31} \pi)}{\pi} \ddot{q}_3 \\
& + \frac{(\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - 4h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3))}{2\pi} \ddot{p}_3 \\
& + \frac{-\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) - 4h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3)}{2\pi} \dot{p}_3^2 \\
& + \frac{-8h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3)}{2\pi} \dot{p}_3 - \lambda_5 a_3 \sin(q_3) + \lambda_6 a_3 \cos(q_3) = \tau_3
\end{aligned} \tag{40}$$

Phương trình với tọa độ khớp khâu đàn hồi

$$\begin{aligned}
& \frac{b_1^2 \mu_{12}}{\pi} \ddot{h}_1 + \frac{3\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - 12h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1)}{6\pi} \ddot{q}_1 \\
& + \frac{(3h_1^2 b_1 \mu_{12} + 2b_1^3 \mu_{12} + 6I_{12})}{6} \ddot{p}_1 \\
& + \frac{3\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + 12h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1)}{6\pi} \dot{q}_1^2 \\
& + h_1 b_1 \mu_{12} \dot{h}_1 \dot{p}_1 - \lambda_1 b_1 \sin(p_1) + \lambda_2 b_1 \cos(p_1) = 0
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b_2^2 \mu_{22} \ddot{h}_2}{\pi} + \frac{3\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) - 12h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2)}{6\pi} \ddot{q}_2 \\
& + \frac{\left(3h_2^2 b_2 \mu_{22} + 2b_2^3 \mu_{22} + 6I_{22}\right)}{6} \ddot{p}_1 \\
& + \frac{3\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + 12h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2)}{6\pi} \dot{q}_1^2 \\
& + h_2 b_2 \mu_{22} \dot{h}_2 \dot{p}_2 - \lambda_3 b_2 \sin(p_2) + \lambda_4 b_2 \cos(p_2) = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b_3^2 \mu_{32} \ddot{h}_3}{\pi} + \frac{3\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - 12h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3)}{6\pi} \ddot{q}_3 \\
& + \frac{\left(3h_3^2 b_3 \mu_{32} + 2b_3^3 \mu_{32} + 6I_{32}\right)}{6} \ddot{p}_3 \\
& + \frac{3\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) + 12h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3)}{6\pi} \dot{q}_3^2 \\
& + h_3 b_3 \mu_{32} \dot{h}_3 \dot{p}_3 - \lambda_5 b_3 \sin(p_3) + \lambda_6 b_3 \cos(p_3) = 0
\end{aligned} \tag{43}$$

Phương trình với tọa độ của bàn máy

$$M_b \ddot{y}_p - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \tag{44}$$

$$M_b \ddot{x}_p - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_6 = 0 \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
& Ib \ddot{\varphi}_p - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_1 l \sin\left(\varphi_p + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_2 l \cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_3 l \cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{3}\right) \\
& - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_4 l \sin\left(\varphi_p + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_5 l \cos(\varphi_p) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_6 l \sin(\varphi_p) = 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Như vậy ta thiết lập được hệ 12 phương trình vi phân (35)-(46) và 6 phương trình đại số liên kết (27)-(32) biểu diễn chuyển động của hệ

### 3. Kết luận

Báo cáo đã xây dựng mô hình động lực học cho bàn máy động phẳng có khâu đàn hồi, sử dụng phương pháp Ritz – Galerkin để rời rạc phần tử thanh đàn hồi.

Phương trình chuyển động được thiết lập bằng cách sử dụng phương trình Lagrange loại 2, từ kết quả xây dựng được cho ta cơ sở để giải quyết các bài toán phức tạp hơn như động lực học và điều khiển quỹ đạo bàn máy động có khâu đàn hồi.